Internet: https://peter-hug.ch/determinanten

HauptteilSeite 4.726

Determinánten 898 Wörter, 5'570 Zeichen

Determinánten (lat.), in der Mathematik gewisse Zahlenverbindungen, auf welche man bei Berechnung der Unbekannten aus einem System linearer Gleichungen kommt. Berechnet man auf gewöhnliche Weise x und y aus den zwei Gleichungen

a1x + b1y = k1 ^[a1x + b1y = k1]

a2x + b2y = k2 ^[a2x + b2y = k2],

in denen a, b und k bekannte Größen sind und die ihnen unten angehängten Ziffern (Indices) die Nummer der Gleichung bezeichnen, so erhält man

x = (k1b2 - k2b1) / (a1b2 - a2b1) ^[x = (k1b2 - k2b1) / (a1b2 - a2b1)]

y = (a1k2 - a2k1) / (a1b2 - a2b1) ^[y = (a1k2 - a2k1) / (a1b2 - a2b1)]

Der gemeinschaftliche Nenner der beiden Formeln, a1b2 - a2b1, heißt nun die Determinante der Größen ^[img] und wird mit ^[img] bezeichnet. Man sieht ferner, daß der Zähler von x aus dem Nenner erhalten wird, wenn man k an die Stelle von a setzt, und ebenso wird der Zähler von y aus dem Nenner

forlaufend erhalten, wenn man b durch k ersetzt. Die Zähler von x und y sind daher ebenfalls Determinánten, und zwar ist der Zähler von x gleich ^[img], der Zähler von y aber gleich ^[img]. Ähnlich ist es auch bei n Gleichungen mit n Unbekannten. Als Beispiel mögen die vier Gleichungen

a1x + b1y + c1z + d1t = k1
a2x + b2y + c2z + d2t = k2
a3x + b3y + c3z + d3t = k3
a4x + b4y + c4z + d4t = k4
^[a1x + b1y + c1z + d1t = k1
a2x + b2y + c2z + d2t = k2
a3x + b3y + c3z + d3t = k3
a4x + b4y + c4z + d4t = k4]

mit den Unbekannten x, y, z, t dienen. Durch das gewöhnliche Eliminationsverfahren, bei welchem man aber alle gemeinschaftlichen Faktoren entfernen muß, erhält man x, y, z und t in Form von Brüchen, welche als Nenner den Ausdruck haben:

a1b2c3d4 - a1b2c4d3 - a1b3c2d4 + a1b3c4d2
+ a1b4c2d3 - a1b4c3d2 - a2b1c3d4 + a2b1c4d3
+ a2b3c1d4 - a2b3c4d1 - a2b4c1d3 + a2b4c3d1
+ a3b1c2d4 - a3b1c4d2 - a3b2c1d4 + a3b2c4d1
+ a3b4c1d2 - a3b4c2d1 - a4b1c2d3 + a4b1c3d2
+ a4b2c1d3 - a4b2c3d1 - a4b3c1d2 - a4b3c2d1,
^[a1b2c3d4 - a1b2c4d3 - a1b3c2d4 + a1b3c4d2
+ a1b4c2d3 - a1b4c3d2 - a2b1c3d4 + a2b1c4d3
+ a2b3c1d4 - a2b3c4d1 - a2b4c1d3 + a2b4c3d1
+ a3b1c2d4 - a3b1c4d2 - a3b2c1d4 + a3b2c4d1
+ a3b4c1d2 - a3b4c2d1 - a4b1c2d3 + a4b1c3d2
+ a4b2c1d3 - a4b2c3d1 - a4b3c1d2 - a4b3c2d1,]
^[Berichtigung: das letzte Glied müßte addiert, nicht subtrahiert werden]

welchen man die Determinante der Größen

a1 b1 c1 d1
a2 b2 c2 d2
a3 b3 c3 d3
a4 b4 c4 d4
^[a1 b1 c1 d1
a2 b2 c2 d2
a3 b3 c3 d3
a4 b4 c4 d4]

nennt und dadurch bezeichnet, daß man die vorstehende Zahlengruppe links und rechts durch einen Vertikalstrich einschließt. Die Zähler von x, y, z und t sind ebenfalls Determinánten, und zwar erhält man die vier Zähler, wenn man im Nenner der Reihe nach a, b, c, d durch k ersetzt. - Was das Bildungsgesetz der Determinante betrifft, so besteht letztere aus 24 Gliedern, von denen 12 das Zeichen plus, 12 das Zeichen minus haben. Erstes Glied ist das Produkt a1b2c3d4 ^[a1b2c3d4], in welchem die Indices in der natürlichen Reihenfolge 1 2 3 4 stehen.

Aus diesem ersten Glied, welches das Pluszeichen hat, erhält man alle andern, wenn man die vier Indices auf alle möglichen Arten versetzt (permutiert). Da die Anzahl der Permutationen von 4 Elementen gleich 1 . 2 . 3 . 4 = 24 ist, so hat unsre Determinante 24 Glieder. Man kann nun die sämtlichen Permutationen durch successive Vertauschung von je 2 Indices bilden, und ein Glied hat das Zeichen plus, wenn es aus dem ersten Glied a1b2c3d4 ^[a1b2c3d4] hervorgeht durch eine gerade Anzahl von Vertauschungen je zweier Indices, dagegen das Zeichen minus, wenn die Anzahl dieser Vertauschungen ungerade ist. Es hat also im Ausdruck unsrer Determinante das Glied a3b4c1d2 ^[a3b4c1d2] das Pluszeichen, denn man erhält aus der Reihenfolge 1 2 3 4 durch Vertauschung von 1 mit 3 und von 2 mit 4, also durch zwei Vertauschungen, die gewünschte Folge 3 4 1 2. Dagegen hat a4b3c1d2 ^[a4b3c1d2] das Zeichen minus, denn man hat drei Vertauschungen, 1 gegen 4, dann 1 gegen 3 und noch 3 gegen 2, vorzunehmen, um aus 1 2 3 4 der Reihe nach 4 2 3 1, 4 2 1 3 und endlich 4 3 1 2 zu erhalten. - Leibniz gebührt das Verdienst, zuerst auf die Determinánten aufmerksam gemacht zu haben.

Die Anwendung dieser Funktionen ist aber nicht beschränkt auf das oben besprochene Problem der Lösung eines Systems linearer Gleichungen. Die wirkliche Ausführung der Rechnung in Determinantenform würde sogar bei Zahlengleichungen, wenn deren Anzahl einigermaßen beträchtlich ist, wenig zu empfehlen sein. Vielmehr kommen Determinánten in den verschiedensten Gebieten der Mathematik vor, und ihr Hauptnutzen besteht darin, daß sie eine symbolische Darstellung der Resultate komplizierter Rechnungen gestatten, ohne daß es der wirklichen Ausführung bedarf, während es möglich ist, aus den symbolischen Formen weitere Schlüsse zu ziehen, damit zu rechnen etc. Zu dem Zweck muß man natürlich die Eigenschaften der Determinánten kennen, über welche die Lehrbücher nachzulesen sind.

Vgl. Diekmann, Einleitung in die Lehre von den Determinánten (Essen 1876);

Baltzer, Theorie und Anwendung der Determinánten (5. Aufl., Leipz. 1882);

Günther, Lehrbuch der Determinantentheorie (2. Aufl., Erlang. 1877).

Ende **Determinánten**

Quelle: **Meyers Konversations-Lexikon, 1888**; Autorenkollektiv, Verlag des Bibliographischen Instituts, Leipzig und Wien, Vierte Auflage, 1885-1892;4. Band, Seite 726 im Internet seit 2005; Text geprüft am 27.2.2008; publiziert von Peter Hug; Abruf am 24.2.2018 mit URL:

Weiter: https://peter-hug.ch/04_0727?Typ=PDF