

Internet: <https://peter-hug.ch/determinanten>

MainSeite 4.726

Determinanten 898 Wörter, 5'570 Zeichen

Determinanten (lat.), in der Mathematik gewisse Zahlenverbindungen, auf welche man bei Berechnung der Unbekannten aus einem System linearer Gleichungen kommt. Berechnet man auf gewöhnliche Weise x und y aus den zwei Gleichungen

$$a_1x + b_1y = k_1 \quad [a_1x + b_1y = k_1]$$

$$a_2x + b_2y = k_2 \quad [a_2x + b_2y = k_2],$$

in denen a , b und k bekannte Größen sind und die ihnen unten angehängten Ziffern (Indices) die Nummer der Gleichung bezeichnen, so erhält man

$$x = (k_1b_2 - k_2b_1) / (a_1b_2 - a_2b_1) \quad [x = (k_1b_2 - k_2b_1) / (a_1b_2 - a_2b_1)]$$

$$y = (a_1k_2 - a_2k_1) / (a_1b_2 - a_2b_1) \quad [y = (a_1k_2 - a_2k_1) / (a_1b_2 - a_2b_1)]$$

Der gemeinschaftliche Nenner der beiden Formeln, $a_1b_2 - a_2b_1$, heißt nun die Determinante der Größen $[img]$ und wird mit $[img]$ bezeichnet. Man sieht ferner, daß der Zähler von x aus dem Nenner erhalten wird, wenn man k an die Stelle von a setzt, und ebenso wird der Zähler von y aus dem Nenner

mehr erhalten, wenn man b durch k ersetzt. Die Zähler von x und y sind daher ebenfalls Determinanten, und zwar ist der Zähler von x gleich $[img]$, der Zähler von y aber gleich $[img]$. Ähnlich ist es auch bei n Gleichungen mit n Unbekannten. Als Beispiel mögen die vier Gleichungen

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1t = k_1$$

$$a_2x + b_2y + c_2z + d_2t = k_2$$

$$a_3x + b_3y + c_3z + d_3t = k_3$$

$$a_4x + b_4y + c_4z + d_4t = k_4$$

$$[a_1x + b_1y + c_1z + d_1t = k_1$$

$$a_2x + b_2y + c_2z + d_2t = k_2$$

$$a_3x + b_3y + c_3z + d_3t = k_3$$

$$a_4x + b_4y + c_4z + d_4t = k_4]$$

mit den Unbekannten x , y , z , t dienen. Durch das gewöhnliche Eliminationsverfahren, bei welchem man aber alle gemeinschaftlichen Faktoren entfernen muß, erhält man x , y , z und t in Form von Brüchen, welche als Nenner den Ausdruck haben:

$$a_1b_2c_3d_4 - a_1b_2c_4d_3 - a_1b_3c_2d_4 + a_1b_3c_4d_2$$

$$+ a_1b_4c_2d_3 - a_1b_4c_3d_2 - a_2b_1c_3d_4 + a_2b_1c_4d_3$$

$$+ a_2b_3c_1d_4 - a_2b_3c_4d_1 - a_2b_4c_1d_3 + a_2b_4c_3d_1$$

$$+ a_3b_1c_2d_4 - a_3b_1c_4d_2 - a_3b_2c_1d_4 + a_3b_2c_4d_1$$

$$+ a_3b_4c_1d_2 - a_3b_4c_2d_1 - a_4b_1c_2d_3 + a_4b_1c_3d_2$$

$$+ a_4b_2c_1d_3 - a_4b_2c_3d_1 - a_4b_3c_1d_2 - a_4b_3c_2d_1,$$

$$[a_1b_2c_3d_4 - a_1b_2c_4d_3 - a_1b_3c_2d_4 + a_1b_3c_4d_2$$

$$+ a_1b_4c_2d_3 - a_1b_4c_3d_2 - a_2b_1c_3d_4 + a_2b_1c_4d_3$$

$$+ a_2b_3c_1d_4 - a_2b_3c_4d_1 - a_2b_4c_1d_3 + a_2b_4c_3d_1$$

$$+ a_3b_1c_2d_4 - a_3b_1c_4d_2 - a_3b_2c_1d_4 + a_3b_2c_4d_1$$

$$+ a_3b_4c_1d_2 - a_3b_4c_2d_1 - a_4b_1c_2d_3 + a_4b_1c_3d_2$$

$$+ a_4b_2c_1d_3 - a_4b_2c_3d_1 - a_4b_3c_1d_2 - a_4b_3c_2d_1,]$$

[Berichtigung: das letzte Glied müßte addiert, nicht subtrahiert werden]

welchen man die Determinante der Größen

$$a_1 \ b_1 \ c_1 \ d_1$$

$$a_2 \ b_2 \ c_2 \ d_2$$

$$a_3 \ b_3 \ c_3 \ d_3$$

$$a_4 \ b_4 \ c_4 \ d_4$$

$$[a_1 \ b_1 \ c_1 \ d_1$$

$$a_2 \ b_2 \ c_2 \ d_2$$

$$a_3 \ b_3 \ c_3 \ d_3$$

$$a_4 \ b_4 \ c_4 \ d_4]$$

Internet: <https://peter-hug.ch/determinanten>

nennt und dadurch bezeichnet, daß man die vorstehende Zahlengruppe links und rechts durch einen Vertikalstrich einschließt. Die Zähler von x , y , z und t sind ebenfalls Determinanten, und zwar erhält man die vier Zähler, wenn man im Nenner der Reihe nach a , b , c , d durch k ersetzt. - Was das Bildungsgesetz der Determinante betrifft, so besteht letztere aus 24 Gliedern, von denen 12 das Zeichen plus, 12 das Zeichen minus haben. Erstes Glied ist das Produkt $a_1b_2c_3d_4 \wedge [a_1b_2c_3d_4]$, in welchem die Indices in der natürlichen Reihenfolge 1 2 3 4 stehen.

Aus diesem ersten Glied, welches das Pluszeichen hat, erhält man alle andern, wenn man die vier Indices auf alle möglichen Arten versetzt (permutiert). Da die Anzahl der Permutationen von 4 Elementen gleich $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ ist, so hat unsere Determinante 24 Glieder. Man kann nun die sämtlichen Permutationen durch successive Vertauschung von je 2 Indices bilden, und ein Glied hat das Zeichen plus, wenn es aus dem ersten Glied $a_1b_2c_3d_4 \wedge [a_1b_2c_3d_4]$ hervorgeht durch eine gerade Anzahl von Vertauschungen je zweier Indices, dagegen das Zeichen minus, wenn die Anzahl dieser Vertauschungen ungerade ist. Es hat also im Ausdruck unserer Determinante das Glied $a_3b_4c_1d_2 \wedge [a_3b_4c_1d_2]$ das Pluszeichen, denn man erhält aus der Reihenfolge 1 2 3 4 durch Vertauschung von 1 mit 3 und von 2 mit 4, also durch zwei Vertauschungen, die gewünschte Folge 3 4 1 2. Dagegen hat $a_4b_3c_1d_2 \wedge [a_4b_3c_1d_2]$ das Zeichen minus, denn man hat drei Vertauschungen, 1 gegen 4, dann 1 gegen 3 und noch 3 gegen 2, vorzunehmen, um aus 1 2 3 4 der Reihe nach 4 2 3 1, 4 2 1 3 und endlich 4 3 1 2 zu erhalten. - Leibniz gebührt das Verdienst, zuerst auf die Determinanten aufmerksam gemacht zu haben.

Die Anwendung dieser Funktionen ist aber nicht beschränkt auf das oben besprochene Problem der Lösung eines Systems linearer Gleichungen. Die wirkliche Ausführung der Rechnung in Determinantenform würde sogar bei Zahlengleichungen, wenn deren Anzahl einigermaßen beträchtlich ist, wenig zu empfehlen sein. Vielmehr kommen Determinanten in den verschiedensten Gebieten der Mathematik vor, und ihr Hauptnutzen besteht darin, daß sie eine symbolische Darstellung der Resultate komplizierter Rechnungen gestatten, ohne daß es der wirklichen Ausführung bedarf, während es möglich ist, aus den symbolischen Formen weitere Schlüsse zu ziehen, damit zu rechnen etc. Zu dem Zweck muß man natürlich die Eigenschaften der Determinanten kennen, über welche die Lehrbücher nachzulesen sind.

Vgl. Diekmann, Einleitung in die Lehre von den Determinanten (Essen 1876);

Baltzer, Theorie und Anwendung der Determinanten (5. Aufl., Leipz. 1882);

Günther, Lehrbuch der Determinantentheorie (2. Aufl., Erlang. 1877).

Ende **Determinanten**

Quelle: **Meyers Konversations-Lexikon, 1888**; Autorenkollektiv, Verlag des Bibliographischen Instituts, Leipzig und Wien, Vierte Auflage, 1885-1892; 4. Band, Seite 726 im Internet seit 2005; Text geprüft am 27.2.2008; publiziert von Peter Hug; Abruf am 25.5.2018 mit URL:

Weiter: https://peter-hug.ch/04_0727?Typ=PDF

Ende eLexikon.